

IT@CookBook, 기초 신호 및 시스템(2판)

[연습문제 답안 이용 안내]

- 본 연습문제 답안의 저작권은 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전재하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

제8장 기본적인 이산 신호와 연산

[Quick Review]

※ 다음 문제에서 옳은 것을 골라라.

(1) 물리적으로 존재하는 신호는 (이산, 연속) 임펄스 함수이다.

Ans) 이산

(2) 이산 단위 임펄스 함수 $\delta[n]$ 은 체 거르기 성질을 만족하지 않는다. (○, ×)

Ans) ×

(3) $\delta[n]$ 을 이용하여 임의의 이산 신호를 표현할 수 (있다, 없다).

Ans) 있다

(4) $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$ 와 같은 신호는 $(u[n] - u[n-3], u[n] - u[n-4])$ 이다.

Ans) $u[n] - u[n-4]$

(5) 모든 이산 (복소) 정현파는 주기 신호이다. (○, ×)

Ans) ×

(6) $\cos(\Omega_0 n)$ 과 $\cos((\Omega_0 + 8\pi)n)$ 은 같은 신호이다. (○, ×)

Ans) ○

(7) 이산 (복소) 정현파가 가질 수 있는 최대 각주파수는 $(1, 2\pi, \infty)$ 이다.

Ans) 2π

(8) 연속 신호의 적분에 상응하는 이산 신호의 연산은 (차분, 증분, 누적합)이다.

Ans) 누적합

(9) 이산 신호의 시간 척도 조절 $x[an]$ 에서 a 는 어떠한 값도 가질 수 있다. (○, ×)

Ans) ×

(10) $x[2n]$ 은 $x[n]$ 에 대한 (축음, 보간, 업 샘플링)이다.

Ans) 축음

(11) $x[n]$ 에 대한 $y[n] = x\left[\frac{n}{2}\right]$ 의 값은 항상 유일하다. (○, ×)

Ans) ×

(12) $x[2n/3]$ 은 $x[n]$ 에 대해 기본 연산을 적용해서 구할 수 (있다 없다).

Ans) 있다.

(13) 신호에 대한 연산의 조합 순서를 바꾸면 시간 이동 값이 변할 수 있다. (○, ×)

Ans) ○

(14) 샘플링에 의해 같은 이산 신호를 얻을 수 있는 연속 정현파는 유일하다. (○, ×)

Ans) ×

(15) 디지털 주파수는 물리적인 차원이 없다. (○, ×)

Ans) ○

(16) 엘리어스는 (샘플링, 꺾기, 기본) 주파수의 정수배만큼 차이가 나는 주파수 집합이다.

Ans) 샘플링

(17) 연속 신호 복원은 주파수 영역에서 (저역, 고역) 통과 필터를 이용하면 가능하다.

Ans) 저역

(18) 주파수 중첩은 샘플링에 의해 주기 반복되는 스펙트럼이 겹치는 현상이다. (○, ×)

Ans) ○

(19) 샘플링 정리는 모든 신호에 대해 유효하다. (○, ×)

Ans) ×

(20) 주파수 중첩이 발생 않는 최소 샘플링 주파수를 (나이퀴스트, 새넌) 주파수라 한다.

Ans) 나이퀴스트

[기초 문제]

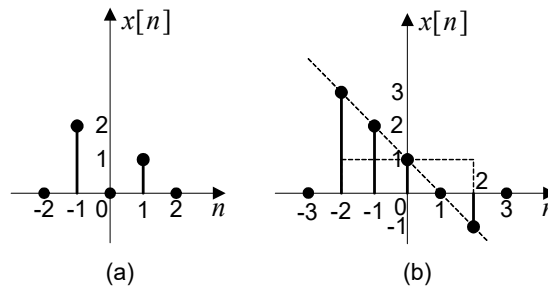
8.1 다음의 이산 신호를 그려라.

(a) $x[n] = \delta[n+1] - \delta[n] + u[n+1] - u[n-2]$

Ans) $x[n] = 2\delta[n+1] + \delta[n-1]$

(b) $x[n] = (1-n)(u[n+2] - u[n-3])$

Ans) $x[n] = 3\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-2]$



8.2 다음의 이산 신호를 그리고 ① 임펄스 함수, ② 계단 함수를 이용하여 표현하라.

(a) $x[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n=1 \\ 3, & n=2 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$

Ans) ① 임펄스 함수 표현

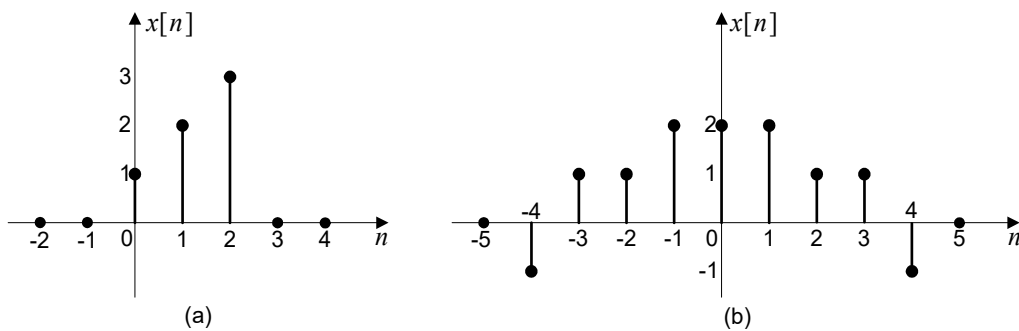
$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

② 계단 함수 표현

$$\begin{aligned} x[n] &= (u[n] - u[n-1]) + 2(u[n-1] - u[n-2]) + 3(u[n-2] - u[n-3]) \\ &= u[n] + u[n-1] + u[n-2] - 3u[n-3] \end{aligned}$$

다른 방법으로

$$\begin{aligned} x[n] &= (n+1)(u[n] - u[n-3]) \\ &= nu[n] - (n-3)u[n-3] + u[n] - 4u[n-3] \end{aligned}$$



(b) $x[n] = \begin{cases} 2, & |n| \leq 1 \\ 1, & 1 < |n| \leq 3 \\ -1, & n = \pm 4 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$

Ans) ① 임펄스 함수 표현

$$x[n] = -\delta[n+4] + \delta[n+3] + \delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] - \delta[n-4]$$

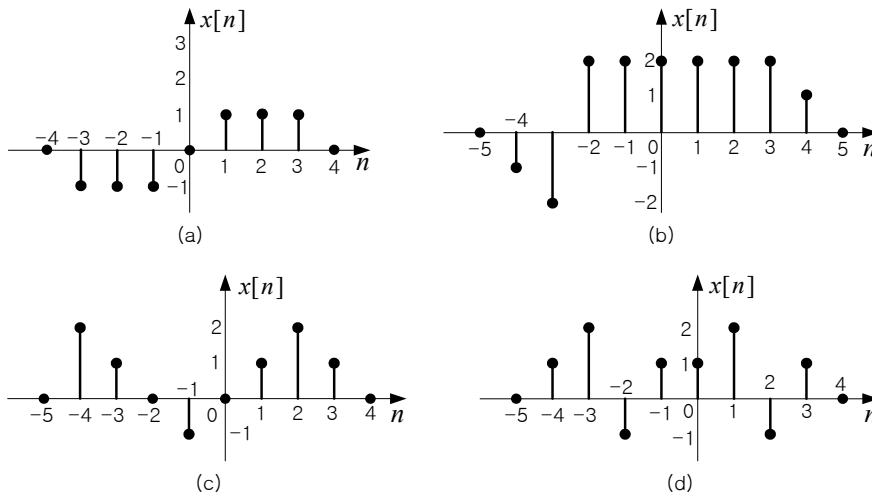
② 계단 함수 표현

$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$ 를 위의 결과에 대입하여 표현식을 정리하면,

$$x[n] = -u[n+4] + 2u[n+3] + u[n+1] - u[n-2] - 2u[n-4] + u[n-5]$$

다른 방법으로, 값이 같은 샘플들을 묶어 구간별로 나누어 사각 펄스 신호로 표시하면 된다.

8.3 다음 그림의 신호를 계단 함수를 이용하여 표현하라.



(a)

Ans) $x[n] = -(u[n+3] - u[n]) + (u[n-1] - u[n-4])$

(b)

Ans) $x[n] = -(n+5)(u[n+5] - u[n+2]) + 2(u[n+2] - u[n-3]) + (-n+5)(u[n-3] - u[n-5])$
 $= -(n+5)u[n+5] + (n+7)u[n+2] - (n-3)u[n-3] + (n-5)u[n-5]$

(c)

Ans) $x[n] = -(n+2)(u[n+4] - u[n+1]) + n(u[n+1] - u[n-1]) - (n-4)(u[n-2] - u[n-5])$

(d)

Ans) $x[n] = (n+5)(u[n+5] - u[n+2]) - (u[n+2] - u[n+1]) + (u[n+1] - u[n-1])$
 $+ 2(u[n-2] - u[n-3]) - (u[n-3] - u[n-4]) + (u[n-4] - u[n-5])$

8.4 다음 이산 (복소) 정현파 신호가 주기 신호인지 아닌지 판별하라. 그리고 주기 신호라면 그 주기를 구하라.

(a) $x[n] = e^{j\frac{5\pi}{7}n}$

Ans) 주기 신호, $N=14$

(b) $x[n] = e^{j\frac{1}{4}n}$

Ans) 비주기 신호

(c) $x[n] = e^{j\sqrt{5}\pi n}$

Ans) 비주기 신호

(d) $x[n] = \cos(\frac{3\pi}{5}n + \frac{\pi}{3})$

Ans) 주기 신호, $N=10$

(e) $x[n] = \cos(2n)$

Ans) 비주기 신호

(f) $x[n] = \sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{\pi}n\right)$

Ans) 비주기 신호

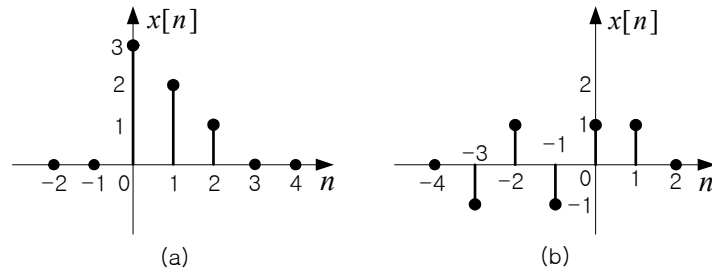
8.5 다음 중 같은 신호가 아닌 것은?

㉠ $\cos\left(\frac{3}{4}\pi n\right)$ ㉡ $\cos\left(\frac{11}{4}\pi n\right)$ ㉢ $\cos\left(\frac{23}{4}\pi n\right)$ ㉣ $\cos\left(\frac{35}{4}\pi n\right)$

Ans) ㉣

$$\cos\left(\frac{23}{4}\pi n\right) = \cos\left(\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{20}{4}\pi\right)n\right)$$

8.6 다음 그림과 같은 신호 $x[n]$ 에 대해 다음의 신호를 그려라.



(i) $y_1[n] = x[n-2]$

Ans) 시간 이동($n=2$ 만큼 지연)

(ii) $y_2[n] = x[-n+2]$

Ans) 시간 이동($n=2$ 만큼 선행) - 시간 반전

(iii) $y_3[n] = x[2n-4]$

Ans) 시간 이동($n=4$ 만큼 지연) - 시간 척도 조절(반으로 압축(축음))

(iv) $y_4[n] = x[n/2]$

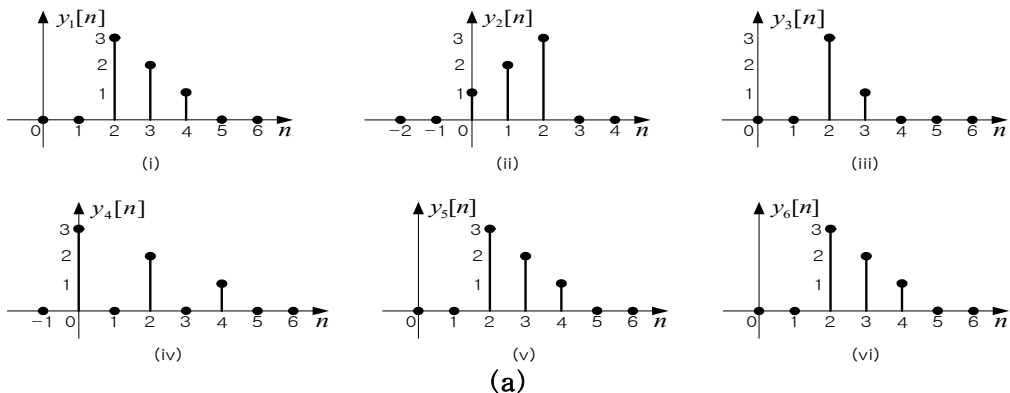
Ans) 시간 척도 조절(2배로 늘임(보간))

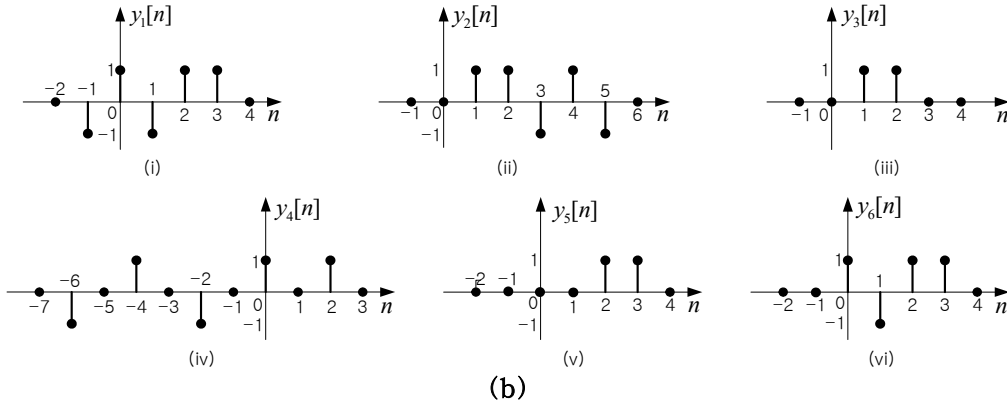
(v) $y_5[n] = x[n-2]u[n-2]$

Ans) $x[n]$ 에 $u[n]$ 을 곱해 $x[n]u[n]$ 을 만든 뒤($n < 0$ 에서 $x[n] = 0$) 이를 시간 이동($n=2$ 만큼 지연)

(vi) $y_6[n] = x[n-2]u[n]$

Ans) $x[n]$ 을 시간 이동($n=2$ 만큼 지연)시켜 $x[n-2]$ 구한 뒤 $u[n]$ 을 곱함($n < 0$ 의 값 삭제)





8.7 정현파 $x(t) = \cos(120\pi t)$ 가 샘플링 주파수 $f_s = 200$ [Hz]로 샘플링되었다.

(a) 샘플링으로 얻어진 이산 신호 $x[n]$ 의 주기 N 은 얼마인가?

Ans) $N = 10$

(b) $x[n]$ 의 한 주기인 N 개의 샘플을 얻기 위해 $x(t)$ 의 몇 주기가 필요한가?

Ans) $t = NT_s = 10 \times 0.005 = 0.05$ [초]만큼의 아날로그 신호 길이가 필요하다.

$\therefore$ 3주기가 필요하다.

(c) 같은 샘플링 주파수에 의해 동일한 이산 신호 $x[n]$ 을 만들 수 있는 최소 주파수를 갖는 연속 정현파를 구하라.

Ans) $x(t) = \cos(120\pi t)$

8.8 다음과 같은 연속 정현파 $x(t)$ 를 주기 T_s 로 샘플링하여 $x[n]$ 을 얻었다. 물음에 답하라.

$$x(t) = \cos(20\pi t), \quad x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

(a) 이 결과에 부합하는 샘플링 주기 T_s 를 구하라.

Ans) $T_s = \frac{1}{100} = 0.01$

(b) (a)에서 구한 T_s 는 유일한가? 그렇지 않다면 다른 T_s 를 구하라.

Ans) $T'_s = T_s + 0.1k = 0.01 + 0.1k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$

8.9 샘플링 주파수 $f_s = 3$ [Hz]에 대해 앨리어스 신호가 아닌 것을 모두 골라라.

- ☐ 가 $\cos(6\pi t)$ ☐ 나 $\cos(12\pi t)$ ☐ 다 $\cos(15\pi t)$ ☐ 라 $\cos(18\pi t)$
☐ 마 $\cos(21\pi t)$ ☐ 바 $\cos(24\pi t)$ ☐ 사 $\cos(27\pi t)$ ☐ 아 $\cos(30\pi t)$

Ans) 다, 바, 사

$$f_0 = 3 \text{ [Hz]}, \text{ 앨리어스들은 } f = f_0 + l f_s = 3 + 3l$$

8.10 주파수 $f_0 = 50$ [Hz] 정현파가 나이퀴스트 샘플링 주파수의 2배로 샘플링되었다. 5초 동안 얼마나 많은 샘플이 얻어졌는가?

Ans) 1,000개의 샘플

[응용 문제]

8.11 다음의 이산 신호를 그려라.

(a) $x[n] = n^2 (\delta[n+2] - \delta[n-2])$

Ans) $x[n] = 4(\delta[n+2] - \delta[n-2])$.

(b) $x[n] = (5 - |n|)(u[n+5] - u[n-5])$

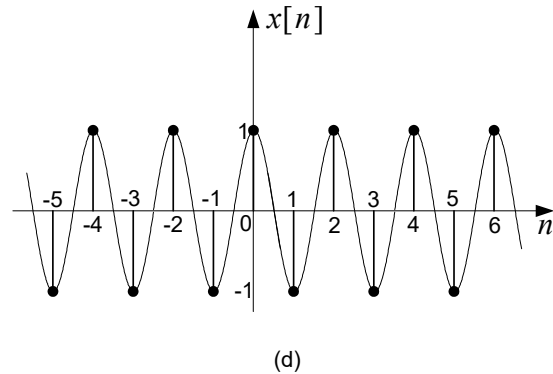
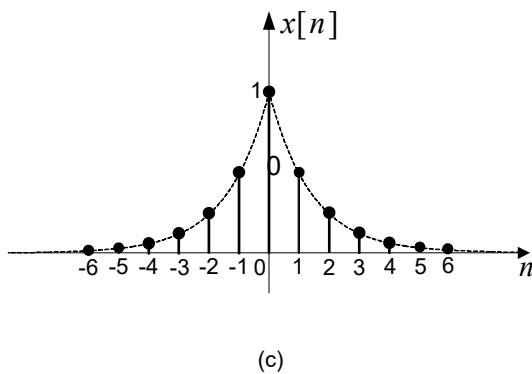
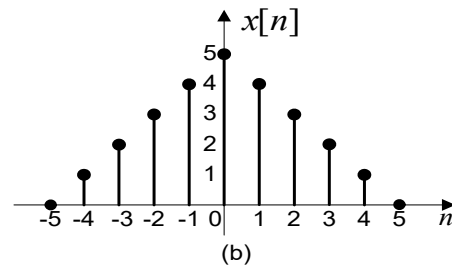
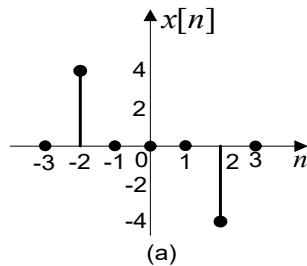
Ans)

(c) $x[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}$

Ans) $x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^k, & n = k \\ (\frac{1}{2})^k, & n = -k \end{cases}$,

(d) $x[n] = \cos(\pi n)$

Ans) $x[n] = \cos(\pi n) = (-1)^n$



8.12 다음의 이산 신호를 그려라.

(a) $x[n] = (n+2)u[n+2] - nu[n-4] - 2u[n-6]$

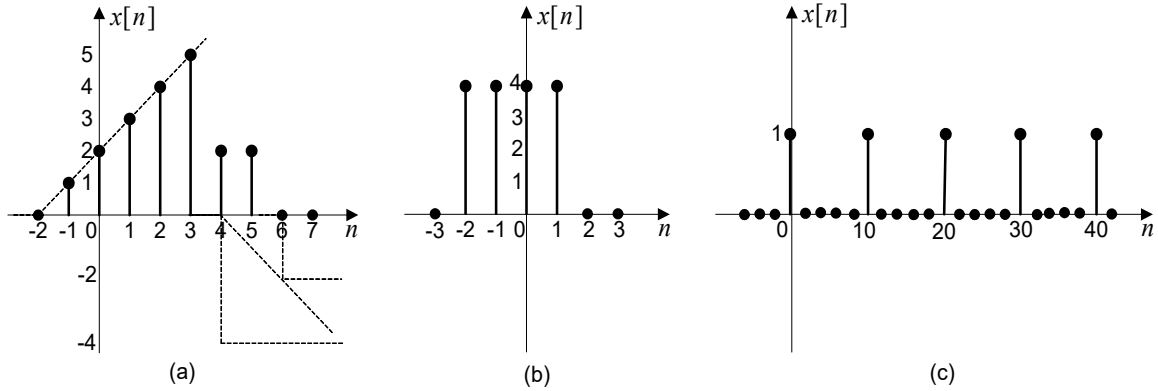
Ans) $x[n] = (n+2)u[n+2] - (n-4)u[n-4] - 4u[n-4] - 2u[n-6]$

(b) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^n k^2 (\delta[k+2] - \delta[k-2])$

Ans) $x[n] = \begin{cases} 0, & n < -2 \\ 4, & -2 \leq n < 2 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}$

(c) $x[n] = \cos(0.2\pi n) \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-10k]$

Ans) $x[n] = \cos(0.2\pi n)(\delta[n] + \delta[n-10] + \delta[n-20] + \delta[n-30] + \dots)$

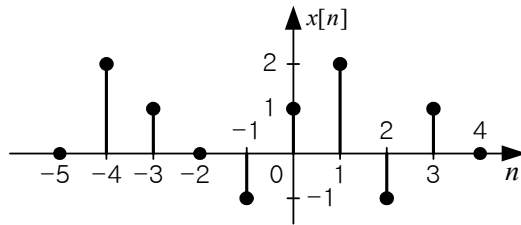


8.13 다음 신호에 대해 $y[n] = x[2n]$ 을 구하라.

Ans)

- (a) $x[n] = \begin{cases} n, & n = \text{홀수} \\ 0, & n = \text{짝수} \end{cases} \rightarrow y[n] = 0$
- (b) $x[n] = \begin{cases} 1, & n = \text{홀수} \\ 2, & n = \text{짝수} \end{cases} \rightarrow y[n] = 2$
- (c) $x[n] = (-1)^n \rightarrow y[n] = 1$

8.14 다음 그림의 신호 $x[n]$ 에 대해 다음의 신호를 그리고 임펄스를 이용해 수식으로 나타내라.



- (a) $y[n] = x[2n+3]$

Ans) 시간 이동($x[n+3]$) - 시간 압축(축음 $x[2n+3]$)

$$y[n] = \delta[n+3] - \delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n]$$

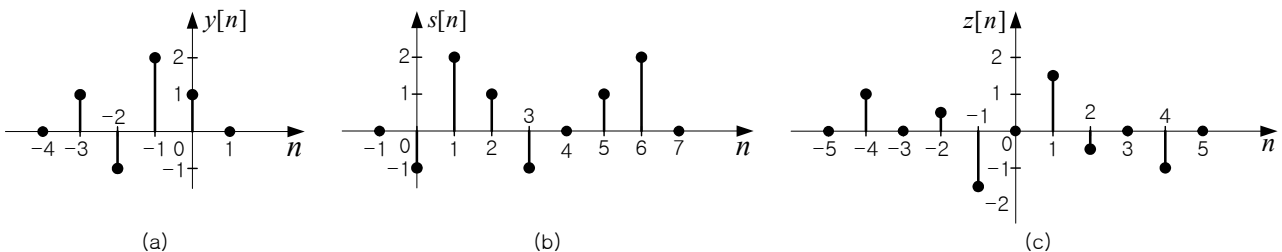
- (b) $s[n] = x[-n+2]u[n]$

Ans) 시간 이동($x[n+2]$) - 시간 반전($x[-n+2]$) - $u[n]$ 과의 곱($x[-n+2]u[n]$)

$$s[n] = -\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3] + \delta[n-4] + 2\delta[n-5]$$

- (c) $z[n] = x_o[n]$ (기대칭 성분)

$$z[n] = \delta[n+4] + 0.5\delta[n+2] - 1.5\delta[n+1] + 1.5\delta[n-1] - 0.5\delta[n-2] - \delta[n-4]$$



8.15 [연습문제 8.3]의 신호 $x[n]$ 에 대해 다음 신호를 그려라.

(a) $y_1[n] = x[n-2]$

Ans) 시간 이동($n=2$ 만큼 지연)

(b) $y_2[n] = x[-n+2]$

Ans) 시간 이동($n=2$ 만큼 선행) - 시간 반전

(c) $y_3[n] = x[2n-4]$

Ans) 시간 이동($n=4$ 만큼 지연) - 시간 척도 조절(반으로 압축(축음))

(d) $y_4[n] = x[n/2]$

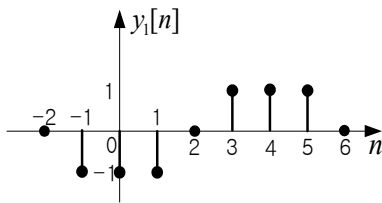
Ans) 시간 척도 조절(2배로 늘임(보간))

(e) $y_5[n] = x[n-2]u[n-2]$

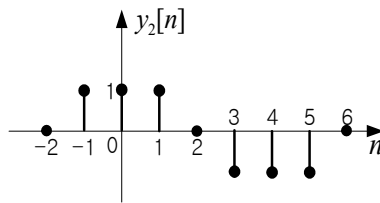
Ans) $x[n]$ 에 $u[n]$ 을 곱해 $x[n]u[n]$ 을 만든 뒤($n < 0$ 에서 $x[n] = 0$) 이를 시간 이동($n=2$ 만큼 지연)

(f) $y_6[n] = x[n-2]u[n]$

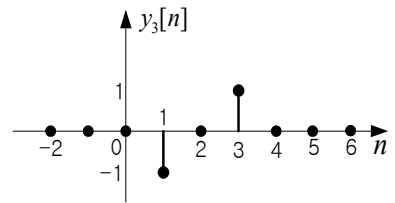
Ans) $x[n]$ 을 시간 이동($n=2$ 만큼 지연)시켜 $x[n-2]$ 구한 뒤 $u[n]$ 을 곱함($n < 0$ 의 값 삭제)



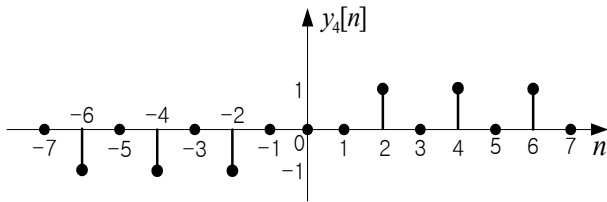
(a)



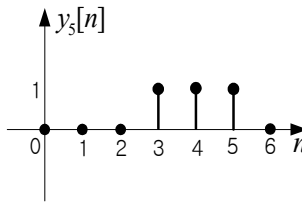
(b)



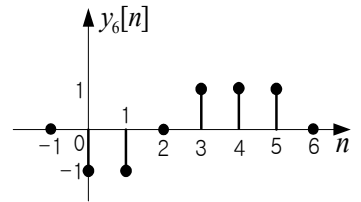
(c)



(d)

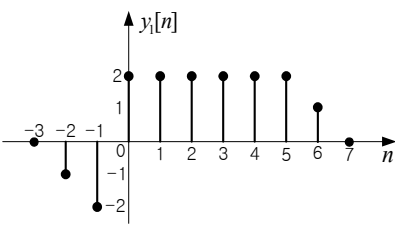


(e)

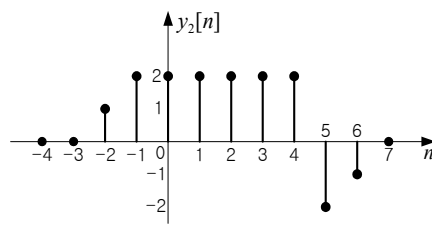


(f)

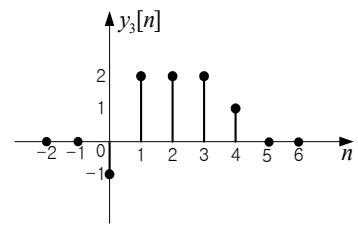
[신호 (a)]



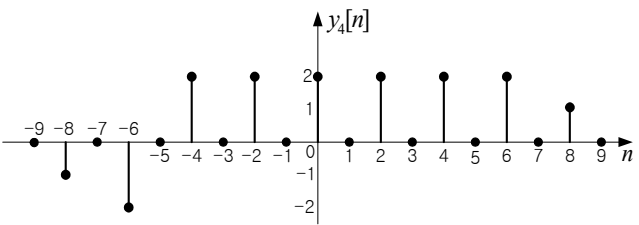
(a)



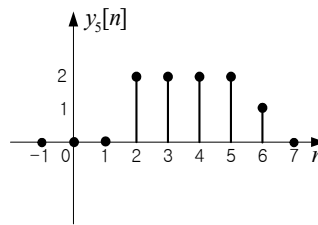
(b)



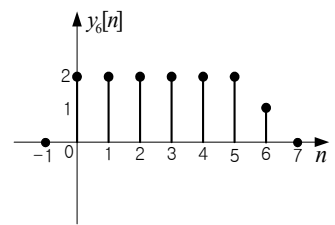
(c)



(d)

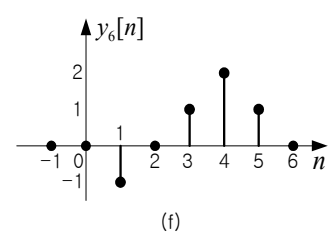
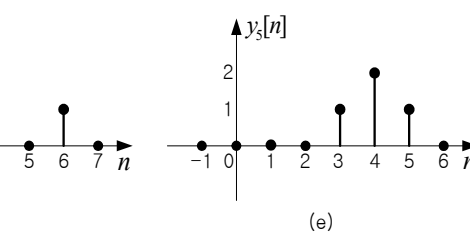
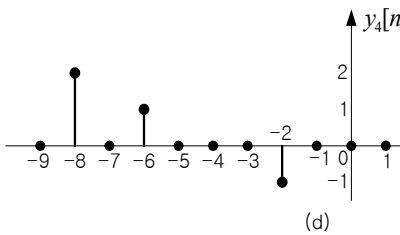
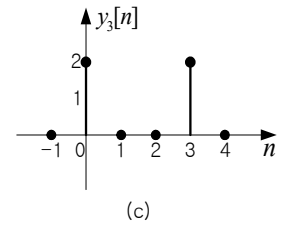
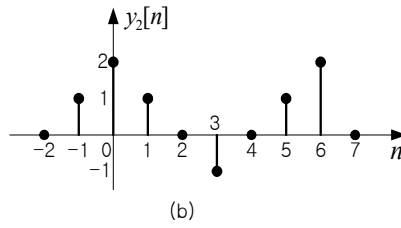
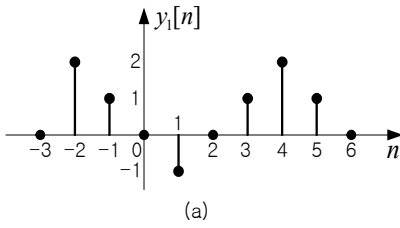


(e)

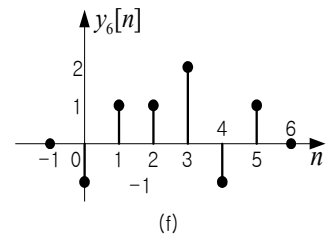
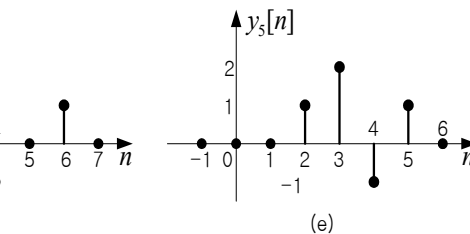
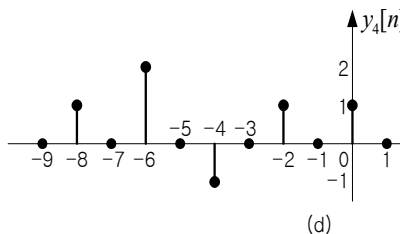
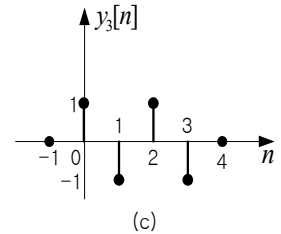
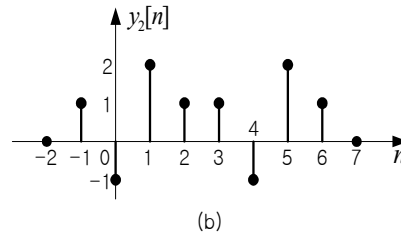
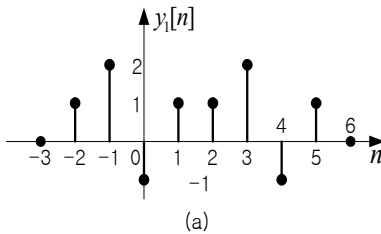


(f)

[신호 (b)]



[신호 (c)]



[신호 (d)]

8.16 다음과 같은 신호 $x(t)$ 를 샘플링 주기 $T_s = 0.01$ 로 샘플링하여 $x[n]$ 을 얻었다

$$x(t) = \sin(20\pi t), \quad x[n] = x(nT_s) = \sin(20\pi nT_s), \quad -\infty < n < \infty$$

(a) 사인파의 한 주기 동안 얼마나 많은 샘플이 취해지겠는가?

Ans) $N = \frac{T}{T_s} = 10$ 개

(b) 사인파 $y(t) = \sin(\omega_0 t)$ 가 모든 n 에 대해 $y(nT_s) = x(nT_s)$ 가 되면서 $\omega_0 > 20\pi$ 인 주파수 ω_0 를 찾아라.

Ans) $x(t)$ 의 주파수 $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = 10$

$y(t)$ 는 $x(t)$ 의 앨리어스

$$\therefore f_0 = f + lf_s = 10 + 100l = 110, 210, 310, \dots$$

$$\therefore \omega_0 = 2\pi f_0 = 220\pi, 420\pi, 620\pi, \dots$$

(c) (b)의 ω_0 에 대해 $x(t)$ 의 한 주기 동안 나오는 샘플의 개수를 구하라.

Ans) $N = 10$

8.17 연속 신호 $x(t)$ 를 $f_s = 10$ [Hz]로 샘플링하여 다음의 이산 신호를 얻었다. 이 신호를 발생시키기 위한 두 개의 다른 연속 신호를 구하라.

(a) $x[n] = \cos(\pi n)$

Ans) $\omega_l = \omega_0 + l\omega_s = 10\pi + 20\pi l$ 또는 $f_l = f_0 + lf_s = 5 + 10l$

$$x(t) = \cos((10\pi + 20\pi l)t) = \cos(10\pi t + 20\pi l t)$$

$$\therefore x_0(t) = \cos(10\pi t)$$

$$x_1(t) = \cos(10\pi t + 20\pi t) = \cos(30\pi t)$$

(b) $x[n] = \cos(3\pi n)$

Ans) $\omega_l = \omega_0 + l\omega_s = 30\pi + 20\pi l$ 또는 $f_l = f_0 + lf_s = 15 + 10l$

$$x(t) = \cos((\pm 30\pi + 20\pi l)t) = \cos(\pm 30\pi t + 20\pi l t)$$

(c) $x[n] = \cos(\frac{\pi}{8}n)$

Ans) $\omega_l = \omega_0 + l\omega_s = \frac{5\pi}{4} + 20\pi l$ 또는 $f_l = f_0 + lf_s = \frac{5}{8} + 10l$

$$x(t) = \cos((\pm \frac{5\pi}{4} + 20\pi l)t) = \cos(\pm \frac{5\pi}{4}t + 20\pi l t)$$

$$\therefore x_0(t) = \cos(\frac{5\pi}{4}t)$$

$$x_1(t) = \cos(\frac{5\pi}{4}t + 20\pi t) = \cos(\frac{85\pi}{4}t)$$

(d) $x[n] = \cos(\frac{5\pi}{4}n)$

Ans) $\omega_l = \omega_0 + l\omega_s = \frac{25\pi}{2} + 20\pi l$ 또는 $f_l = f_0 + lf_s = \frac{25}{4} + 10l$

$$x(t) = \cos((\pm \frac{25\pi}{2} + 20\pi l)t) = \cos(\pm \frac{25\pi}{2}t + 20\pi l t)$$

$$\therefore x_0(t) = \cos(\frac{25\pi}{2}t)$$

$$x_1(t) = \cos(-\frac{25\pi}{2}t + 20\pi t) = \cos(\frac{15\pi}{2}t)$$

8.18 이산 신호 $x[n] = A \cos(2\pi F_0 n + \phi)$ 은 연속 신호 $x(t) = \sin(30\pi t)$ 를 샘플링 주파수 f_s 로 샘플링하여 얻은 것이다. 샘플링 주파수가 아래와 같을 때 디지털 주파수 F_0 와 위상 ϕ 의 값을 결정하라.

(a) $f_s = 10$ [Hz]

Ans) $x[n] = \cos(30\pi \frac{n}{10} - \frac{\pi}{2}) = \cos(3\pi n - \frac{\pi}{2}) = \cos(\pi n - \frac{\pi}{2})$

$$\therefore F_0 = 0.5, \quad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

(b) $f_s = 30$ [Hz]

Ans) $x[n] = \cos(30\pi \frac{n}{30} - \frac{\pi}{2}) = \cos(\pi n - \frac{\pi}{2})$

$$\therefore F_0 = 0.5, \quad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

(c) $f_s = 40$ [Hz]

Ans) $x[n] = \cos(30\pi \frac{n}{40} - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{3}{4}\pi n - \frac{\pi}{2})$

$$\therefore F_0 = \frac{3}{8} = 0.375, \quad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

8.19 다음 신호에 대한 나이퀴스트 샘플링 주파수를 결정하라.

(a) $x(t) = 10 \cos(10\pi t) + \sin(15\pi t)$

Ans) $f_N = 2f_1 = 15 [\text{Hz}]$ 또는 $\omega_N = 2\pi f_N = 30\pi$

(b) $x(t) = 10 \cos(10\pi t) \sin(15\pi t)$

Ans) $f_N = 2f_1 = 25 [\text{samples/sec}]$ 또는 $\omega_N = 2\pi f_N = 50\pi$

(c) $x(t) = 2 \cos(10\pi t) - \cos(20\pi t) + 4 \cos(40\pi t)$

Ans) $f_N = 2f_3 = 40 [\text{Hz}]$ 또는 $\omega_N = 2\pi f_N = 80\pi$

(d) $x(t) = 10 \cos^2(10\pi t)$

Ans) $f_N = 2f_2 = 20 [\text{samples/sec}]$ 또는 $\omega_N = 2\pi f_N = 40\pi$

8.20 $x(t)$ 의 나이퀴스트 샘플링 주파수가 f_s 일 때, 다음의 각 신호의 나이퀴스트 샘플링 주파수를 구하라.

(a) $x(2t)$

Ans) $f_s' = 2(2f_b) = 2f_s$

(b) $x^2(t)$

Ans) $f_s' = 2(2f_b) = 2f_s$

(c) $x(t)\cos(2\pi f_c t)$

Ans) $f_s' = 2(f_b + f_c) = f_s + 2f_c$